ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS & INDUSTRIES TEXTILES - ROUBAIX

Concours 1ère année 1976

Epreuve de MATHEMATIQUES

Durée : 4 h

1re partie : ANALYSE

Exercice 1 :

1° Soit c un réel tel que : $0 < c < 1$

Calculer l'intégrale

$$I_1 = \int_0^c \frac{4y^2\,dy}{(1+y^2)(1-y^2)}$$

2° Soit a et b réels, $0 < a < b$

Calculer l'intégrale

$$I_2 = \int_a^b \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx$$

(par changement de variable, on se ramènera au calcul d'une intégrale de type I_1).

Exercice 2 :

On se propose d'étudier la variation et de construire le graphe Γ de la fonction f définie par

$$x \xrightarrow{f} f(x) = x\,e^{\frac{2x}{x^2-1}}$$

.../...

1° Intervalles de définition ; limites de f lorsque $x \longrightarrow -1 \pm 0$, $x \longrightarrow 1 \pm 0$, $x \longrightarrow \pm\infty$

2° Calculer f' et déterminer le signe de f' en étudiant les variations de la fonction g définie par

$$x \xrightarrow{g} g(x) = 1 - 2x\,\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

En déduire le tableau de variation de f.

3° Déterminer l'asymptôte oblique et préciser la position de Γ par rapport à cette asymptôte.

4° Préciser les points d'arrêts, la demi-tangente en ces points et la tangente à l'origine.

Tracer le graphe de Γ

Exercice 3 :

On considère l'équation différentielle :

$$(1) \qquad (1 + x^2)\,y'' + xy' - \frac{1}{4}\,y = 0$$

où y désigne une fonction inconnue de la variable x.

I° A quelles relations doit satisfaire la suite (a_n) pour que la somme de la série entière

$$\sum_0^\infty a_n x^n$$

vérifie formellement l'équation (1) ?

Montrer que ces relations déterminent la suite (a_n) connaissant a_0 et a_1.

Quel est le rayon de convergence des séries entières obtenues ?

2° Transformer l'équation (1) par le changement de variable x = sht

Intégrer la nouvelle équation obtenue et en déduire la solution générale de l'équation (1).

.../...

2° Partie - ALGEBRE.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{C}$. Soit a et b deux nombres complexes tels que $a^2 + b^2 = 1$. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E.

I) On définit en endomorphisme de E par $f(e_1) = e_1$; $f(e_2) = ae_2 + be_3$ et $f(e_3) = - be_2 + ae_3$

1°/ Quels sont le noyau et l'image de f ? Montrer que f est un isomorphisme.

2°/ Soit $\mathcal{E}$ l'application identique de E dans E. Trouver l'image et le noyau de $f - \mathcal{E}$. Quels sont les vecteurs invariants de f ?

3°/ Montrer que, lorsque a et b varient (avec $a^2 + b^2 = 1$), f décrit un sous-groupe commutatif du groupe des endomorphismes de E pour la loi de composition des applications..

II)

1°/ Ecrire la matrice U de f - Calculer U^{-1} , ${}^tU$.

Soit $\mathcal{M}$ le groupe multiplicatif des matrices carrées d'ordre 3 inversibles. Montrer que lorsque a et b varient (tou jours avec $a^2 + b^2 = 1$) . U décrit un sous-groupe commutatif $\mathcal{U}$ de $\mathcal{M}$.

2°/ Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices A telles que ${}^tA = A^{-1}$.
Calculer $|\det A|$ (det A désigne le déterminant de A).
Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-groupe de $\mathcal{M}$. Montrer que $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$

III) On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} b^2 + a^2 \cos t & a \sin t & ab(1 - \cos t) \\ - a \sin t & \cos t & b \sin t \\ ab(1 - \cos t) & - b \sin t & a^2 + b^2 \cos t \end{pmatrix}$$

ou t est un paramètre réel.

Soit g l'endomorphisme de E, dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est M. On fait un changement de base défini par :

$$e'_1 = be_1 + ae_3$$

$$e'_2 = e_2$$

$$e'_3 = - ae_1 + be_3$$

Calculre la matrice M' de g dans la base (e'_1, e'_2, e'_3) Montrer que $M' \in \mathcal{U}$

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail